امتحانات تجريبية مع حلولها المفصلة

شعبتي : رياضيات وَ تقني رياضي

المراجعة النهائية

الموضوع رقم (01)

شعبتي : رياضيات وَ تقني رياضي

التمرين الأول : ---------- (أسئلة حول الدوال)

- اختر الإجابة الصحيحة مع التبرير في كل مما يلي :

1/ الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \dfrac{1}{x \ln x}$ على المجال $]1;+\infty[$ وَ التي تنعدم عند القيمة $x = \sqrt{e}$ هي :

أ- $\ln(\ln x) + \ln 2$ ب- $\ln(|\ln x|) - \ln 2$ جـ- $\ln(2|\ln x|)$

2/ إذا كانت $g(x) > 0$ في المجال $]-1;+\infty[$ وَ كانت $f(x) = g(e^x - 1)$ فإن $f(x) > 0$ في المجال :

أ- $]-1;+\infty[$ ب- $]-\infty;1[$ جـ- $]-\infty;+\infty[$

3/ إذا كانت f دالة فردية ، فإن دالتها الأصلية F هي دالة :

أ- زوجية ب- فردية جـ- لا زوجية و لا فردية

4/ الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \ln\left(\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{2}x\right)$ هي دالة :

أ- زوجية ب- فردية جـ- لا زوجية و لا فردية

5/ f وَ g دالتان قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وَ $f(x_0) = g(x_0) = 0$ فإن $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ تساوي :

أ- $\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ ب- $\pm\infty$ جـ- لا يمكن حسابها

التمرين الثاني : ---------- (الأعداد المركبة)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد وَ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z التالية : $(2z-1)^2 + (2-i)^2 = 0$

نرمز بـ z_1 وَ z_2 إلى حلي المعادلة حيث $\text{Im}(z_1) < \text{Im}(z_2)$ وَ النقطتين A وَ B صورها على الترتيب .

2/ أكتب كل من z_1 وَ z_2 على الشكل الأسي ، ثم تحقق أن : $z_2 = {z_1}^{2015} + \left(\dfrac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^{2016}$.

3/ f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(x;y)$ ذات اللاحقة z النقطة $M'(x';y')$ ذات اللاحقة z' حيث : $z' = z_2\, z + z_1\, z_2$.

أ- عين صورة النقطة B بالتحويل f ، ماذا تستنتج ؟

ب- عين قيساً للزاوية $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BM'})$ ، ثم أحسب الطول BM' بدلالة الطول BM .

ج- استنتج الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل النقطي f .

4/ أ- عين ثم أنشئ مجموعة النقط $M(x;y)$ بحيث يكون : $|(1+i)z + 1 - i| = \sqrt{2}$.

ب- عين ثم أنشئ مجموعة النقط $M(x;y)$ بحيث يكون : $\arg\left(z_2\,\bar{z} + z_1\, z_2\right)^2 = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.

التمرين الثالث : ---------- (الهندسة الفضائية)

نعتبر في الفضاء معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ حيث $A(1;2;-2)$ ، $B(1;-1;1)$ وَ $C(2;1;-2)$.

1/ بين أن النقط A ، B وَ C تعين مستوياً.

2/ عين تمثيلاً وسيطياً للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة ديكارتية له.

3/ لتكن (S) سطح الكرة التي مركزها النقطة $\Omega(1;1;1)$ وَ نصف قطرها $R=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

أ- بين أن المستوي (ABC) مماس لسطح الكرة (S) .

ب- أوجد إحداثيات H نقطة تماس (ABC) وَ (S) .

4/ لتكن $M(a;b;c)$ نقطة من المستوي (ABC) ، بين أن : $a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}$.

5/ لتكن α ، β وَ δ ثلاثة أعداد حقيقية .

أ- اثبت أنه إذا كانت النقطة H مرجحاً للجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\delta)\}$ فإن : $\alpha+\beta+\delta=1$

ب- عين الأعداد α ، β وَ δ .

التمرين الرابع : ---------- (الدالتين الأسية وَ اللوغاريتمية)

I- نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=xe^x-1$

1/ أدرس تغيرات الدالة g .

2/ أثبت أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0,567<\alpha<0,568$.

3/ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بالعبارة : $f(x)=\left(e^x-\ln|x|\right)^2$

وَ ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=2\|\vec{j}\|$.

1/ أثبت أنه من أجل كل $x>0$ فإن : $f(x)=x^2\left(\frac{e^x}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)^2$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2/ أ- بين أن المعادلة $e^x-\ln(-x)=0$ تقبل حلاً وحيداً β حيث $\beta\in]-1,4\ ;\ -1,3[$.

ب- استنتج على $\mathbb{R}-\{0\}$ حلول المتراجحات : $e^x>\ln(x)$ ، $e^x<\ln(-x)$ وَ $e^x\geq\ln(-x)$.

3/ أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{0\}$ فإن : $f'(x)=\frac{2}{x}\left(e^x-\ln|x|\right)g(x)$.

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f .

4/ بين أن : $f(\alpha)=\left(\frac{1}{\alpha}+\alpha\right)^2$ ، ثم استنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$ سعته 10^{-2} .

5/ شكل جدول تغيرات الدالة f ، ثم أرسم (C_f) على المجال $[-7;0[\cup]0;2]$.

6/ ناقش حسب قيم الوسيط m $\left(m\in\mathbb{R}^+\right)$ ، عدد وَ إشارة حلول المعادلة : $e^x-\ln|x|-\sqrt{m}=0$.

التصحيح النموذجي للموضوع رقم (01)
شعبتي : رياضيات وَ تقني رياضي

حل التمرين الأول

1/ الدالة $x \mapsto \frac{1}{x \ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$ و هي من الشكل $\frac{u'}{u}$ إذن دالتها الأصلية هي : $x \mapsto \ln(\ln x) + C$ مع $C \in \mathbb{R}$

و بما أنها تنعدم عند القيمة $x = \sqrt{e}$ فإن : $\ln(\ln\sqrt{e}) + C = 0$ منه : $\ln\frac{1}{2} + C = 0$ و منه : $C = \ln 2$

إذن أصلية الدالة $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ على المجال $]1;+\infty[$ وَ التي تنعدم عند القيمة $x = \sqrt{e}$ هي الدالة :

$x \mapsto \ln(\ln x) + \ln 2$ و بالتالي الإجابة الصحيحة هي أ .

2/ لدينا $g(x) > 0$ من أجل $]-1;+\infty[$ و بالتالي : $g(e^x - 1) > 0$ من أجل $x \in]-1;+\infty[$ $(e^x - 1) \in]-1;+\infty[$

منه $f(x) > 0$ من أجل $]0;+\infty[$ أي : $e^x \in]0;+\infty[$ و بالتالي الإجابة الصحيحة هي جـ .

3/ لدينا f دالة فردية معناه : $f(-x) = -f(x)$ منه : $-F(-x) = -F(x)$ أي : $F(-x) = F(x)$

هذا يعني أن F دالة زوجية و بالتالي الإجابة الصحيحة هي أ .

4/ $$f(-x) = \ln\left(\sqrt{2x^2+1} + \sqrt{2}x\right) = \ln\left(\frac{\left(\sqrt{2x^2+1} + \sqrt{2}x\right)\left(\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{2}x\right)}{\left(\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{2}x\right)}\right) = \ln\frac{1}{\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{2}x}$$

$$= -\ln\left(\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{2}x\right) = -f(x)$$

إذن f دالة فردية على $\mathbb{R}$ و بالتالي الإجابة الصحيحة هي ب .

5/لدينا : $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)}{x-x_0}}{\frac{g(x)}{x-x_0}} = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

و بالتالي الإجابة الصحيحة هي أ .

حل التمرين الثاني

1/ حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $(2z-1)^2 + (2-i)^2 = 0$

لدينا: $(2z-1)^2 + (2-i)^2 = 0$ تكافئ: $(2z-1)^2 - i^2(2-i)^2 = 0$ تكافئ: $(2z-1)^2 - (1+2i)^2 = 0$

تكافئ: $(2z-1+1+2i)(2z-1-1-2i) = 0$ تكافئ: $(2z+2i)(2z-2-2i) = 0$

معناه: $(2z+2i = 0$ أو $2z-2-2i = 0)$ وَ بالتالي: $(z = -i$ أو $z = 1+i)$.

إذن مجموعة حلول المعادلة هي : $S = \{-i;1+i\}$ وَ كون $\mathrm{Im}(z_1) < \mathrm{Im}(z_2)$ فإن: $z_2 = 1+i$ ، $z_1 = -i$.

2/ كتابة على الشكل الأسي لكل من z_1 وَ z_2 :

لدينا: $z_1 = -i$ مع $|z_1| = 1$ وَ $\arg(z_1) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ إذن : $z_1 = e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

وَ: $z_2=1+i$ مع $|z_2|=\sqrt{2}$ وَ $\arg(z_2)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ إذن: $z_2=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$.

لنتحقق من صحة: $z_2=z_1^{2015}+\left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^{2016}$

لدينا: $z_1=-i$ منه: $z_1^{2015}=(-i)^{2015}=-i^{4\times503+3}=-\underbrace{i^{4\times503}}_{1}\times i^3=-i^3=-i^2\times i=i$

و لدينا: $z_2=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ منه: $\left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^{2016}=e^{i\,2016\frac{\pi}{4}}=e^{i(504\pi)}=1$ إذن: $z_1^{2015}+\left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^{2016}=i+1=z_2$.

3/ أ- تعيين صورة النقطة B بالتحويل f:

لدينا: $z_2\,z_2+z_1\,z_2=z_2\,(z_2+z_1)=(1+i)(1+i-i)=1+i=z_2$

إذن: $f(B)=B$ أي صورة النقطة B بالتحويل f هي النقطة B و بالتالي نستنتج أن $B(1;1)$ نقطة صامدة.

ب- تعيين قيساً للزاوية $\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BM'}\right)$:

لدينا: $\begin{cases}z'=(1+i)z+1-i\\ z_2=(1+i)z_2+1-i\end{cases}$ بالطرح نجد: $z'-z_2=(1+i)(z-z_2)$...(1)

العلاقة (1) تعني: $\arg(z'-z_2)=\arg(1+i)+\arg(z-z_2)$ تكافئ: $\left(\vec{i};\overrightarrow{BM'}\right)=\frac{\pi}{4}+\left(\vec{i};\overrightarrow{BM}\right)$

تكافئ: $\left(\vec{i};\overrightarrow{BM'}\right)-\left(\vec{i};\overrightarrow{BM}\right)=\frac{\pi}{4}$ تكافئ: $\left(\overrightarrow{BM};\vec{i}\right)+\left(\vec{i};\overrightarrow{BM'}\right)=\frac{\pi}{4}$ إذن: $\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BM'}\right)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$.

حساب الطول BM' بدلالة الطول BM: العلاقة (1) تعني: $|z'-z_2|=|1+i|\times|z-z_2|$ إذن: $BM'=\sqrt{2}\times BM$.

ج- استنتاج الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل النقطي f:

بما أن: $BM'=\sqrt{2}\times BM$ وَ $\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BM'}\right)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ وَ $f(B)=B$

فإن التحويل f تشابه مباشر نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$ و مركزه النقطة $B(1;1)$.

4/ تعيين ثم إنشاء مجموعة النقط $M(x;y)$:

أ- لدينا: $|(1+i)z+1-i|=\sqrt{2}$ تكافئ: $|z_2\,z+z_1\,z_2|=\sqrt{2}$ تكافئ: $|z_2|\times|z+z_1|=\sqrt{2}$ تكافئ: $\sqrt{2}\times|z+z_1|=\sqrt{2}$

تكافئ: $|z+z_1|=1$ تكافئ: $|x+i(y-1)|=1$ تكافئ: $x^2+(y-1)^2=1$

إذن مجموعة النقط هي دائرة مركزها النقطة $H(0;1)$ و نصف قطرها $r=1$.

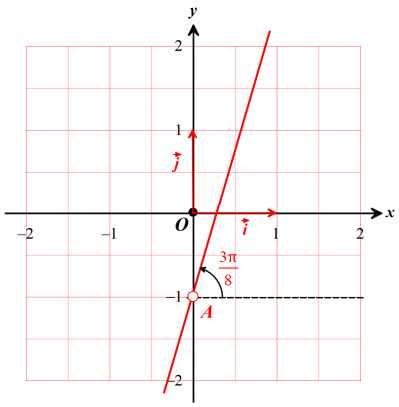
ب- لدينا: $\arg(z_2\,\bar{z}+z_1\,z_2)^2=\arg(z_1)+\arg(z_2)$ تكافئ: $2\arg(z_2\,\bar{z}+z_1\,z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)$

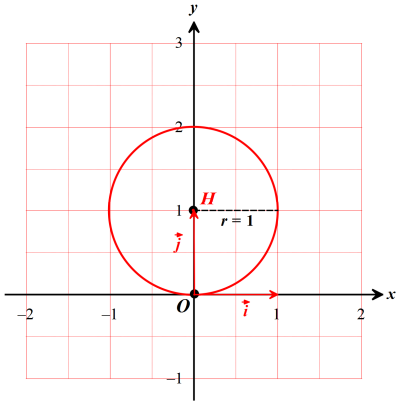
تكافئ: $2\arg(\bar{z}+z_1)+2\arg(z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)$ تكافئ: $\arg(\bar{z}+z_1)=\frac{\arg(z_1)-\arg(z_2)}{2}+k\pi$

تكافئ: $\arg(\bar{z}+z_1)=-\frac{3\pi}{8}+k\pi$ تكافئ: $\arg\overline{(\bar{z}+z_1)}=\frac{3\pi}{8}+k\pi$ تكافئ: $\arg(z+\bar{z}_1)=\frac{3\pi}{8}+k\pi$

تكافئ: $\arg(z-z_1)=\frac{3\pi}{8}+k\pi$ أي: $\left(\vec{i};\overrightarrow{AM}\right)=\frac{3\pi}{8}+k\pi$

إذن مجموعة النقط هو المستقيم (AM) باستثناء النقطة A.





حل التمرين الثالث

1/ لنبين أن النقط A ، B ، C ليست في استقامية :

لدينا: $\overrightarrow{AB}(0;-3;3)$ و $\overrightarrow{AC}(1;-1;0)$

بما أن: $\frac{0}{1} \neq \frac{-3}{-1}$ فإن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً أي النقط A ، B ، C تعين مستوياً.

2/ تعيين تمثيلاً وسيطياً للمستوي (ABC) :

لدينا: $\overrightarrow{AB}(0;-3;3)$ و $\overrightarrow{AC}(1;-1;0)$ هما شعاعي توجيه المستوي (ABC) و A نقطة منه

إذن: $\begin{cases} x = 1 + 0t + 1s \\ y = 2 - 3t - 1s \\ z = -2 + 3t + 0s \end{cases}$ أي: $\begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 - 3t - s \\ z = -2 + 3t \end{cases}$ و هو التمثيل الوسيطي للمستوي (ABC) حيث $(t,s) \in \mathbb{R}^2$.

- استنتاج المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) :

لدينا: $\begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 - 3t - s \\ z = -2 + 3t \end{cases}$ بجمع كل المعادلات طرفاً لطرف نجد: $x + y + z = 1$ أي: $(ABC) : x + y + z - 1 = 0$.

3/ أ- لنبين أن المستوي (ABC) مماس لسطح الكرة (S) :

لدينا: $d(\omega;(ABC)) = \frac{|x_\Omega + y_\Omega + z_\Omega - 1|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ منه: $d(\Omega;(ABC)) = R$

إذن المستوي (ABC) مماس لسطح الكرة (S).

ب- تعيين إحداثيات النقطة H :

ليكن $\vec{n}(1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

$\overrightarrow{\Omega H}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطياً معناه: $\overrightarrow{\Omega H} = k\vec{n}$ حيث $k \in \mathbb{R}$ و $H(x_H ; y_H ; z_H)$

$\overrightarrow{\Omega H} = k\vec{n}$ تكافئ: $\begin{cases} x_H - 1 = k \\ y_H - 1 = k \\ z_H - 1 = k \end{cases}$ تكافئ: $\begin{cases} x_H = k + 1 \\ y_H = k + 1 \\ z_H = k + 1 \end{cases}$ ...(1)

و لدينا: $H \in (ABC)$ معناه: $x_H + y_H + z_H - 1 = 0$ تكافئ: $3k + 2 = 0$ تكافئ: $k = \frac{-2}{3}$

بتعويض $k = \frac{-2}{3}$ في (1) نجد: $x_H = \frac{1}{3}$ ، $y_H = \frac{1}{3}$ ، $z_H = \frac{1}{3}$ إذن : $(S) \cap (ABC) = \left\{ H\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) \right\}$.

4/ لنبين أن : $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$

لدينا $M(a;b;c)$ نقطة من المستوي (ABC) معناه: $a+b+c-1=0$ و $\Omega M \geq R$

$\Omega M \geq R$ تكافئ: $\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2} \geq \frac{2\sqrt{3}}{3}$ بالتربيع الطرفين نجد : $(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2 \geq \frac{4}{3}$

تكافئ: $(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)+(c^2-2c+1) \geq \frac{4}{3}$ تكافئ: $a^2+b^2+c^2-2a-2b-2c+3 \geq \frac{4}{3}$

تكافئ: $a^2+b^2+c^2-2\underbrace{(a+b+c-1)}_{0}+1 \geq \frac{4}{3}$ تكافئ $a^2+b^2+c^2+1 \geq \frac{4}{3}$ إذن: $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$.

5/ أ- إثبات أن $\alpha+\beta+\delta=1$:

التمثيل الوسيطي للمستوي (ABC) هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ بحيث : $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$ مع $(t,s)\in\mathbb{R}^2$

و $H\in(ABC)$ معناه: $\overrightarrow{AH}=t\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$ منه: $\overrightarrow{AH}=t(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB})+s(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC})$

تكافئ: $\overrightarrow{AH}=t\overrightarrow{AH}+t\overrightarrow{HB}+s\overrightarrow{AH}+s\overrightarrow{HC}$ تكافئ: $(1-t-s)\overrightarrow{AH}-t\overrightarrow{HB}-s\overrightarrow{HC}=\vec{0}$

تكافئ: $(1-t-s)\overrightarrow{AH}+t\overrightarrow{BH}+s\overrightarrow{CH}=\vec{0}$...(*)

بوضع: $\alpha=1-t-s$ ، $\beta=t$ و $\delta=s$ فإن العلاقة (*) تصبح: $\alpha\overrightarrow{AH}+\beta\overrightarrow{BH}+\delta\overrightarrow{CH}=\vec{0}$

و بما أن : $\alpha+\beta+\delta=1\neq 0$ فإن النقطة H مرجحاً للجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\delta)\}$.

ب- تعيين الأعداد α ، β و δ :

لدينا: $H\in(ABC)$ معناه : $\begin{cases}x_H=1+s\\y_H=2-3t-s\\z_H=-2+3t\end{cases}$ منه: $\begin{cases}\frac{1}{3}=1+s\\\frac{1}{3}=-2+3t\end{cases}$ و منه: $\begin{cases}s=-\frac{2}{3}\\t=\frac{7}{9}\end{cases}$ إذن : $\alpha=\frac{8}{9}$ ، $\beta=\frac{7}{9}$ و $\delta=-\frac{2}{3}$.

حل التمرين الرابع

I- 1/ دراسة تغيرات الدالة g :

① مجموعة التعريف: لدينا $D_g=]-\infty;+\infty[$.

② حساب النهايات: $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x-1)=0-1=-1$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(xe^x-1)=+\infty-1=+\infty$

③ اتجاه التغير: الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $g'(x)=e^x(x+1)$.

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(x+1)$ لأن e^x دوما موجب إذن:

- إذا كان: $x\in]-\infty;-1[$ فإن: $g'(x)<0$ أي الدالة g متناقصة تماماً .
- إذا كان: $x\in[-1;+\infty[$ فإن: $g'(x)\geq 0$ أي الدالة g متزايدة تماماً .

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$			
$g(x)$	-1	↘	$g(-1)$	↗	0	↗	$+\infty$

④ جدول التغيرات: $g(-1)=-\frac{1}{e}-1\approx -1,37$

2/ لنبين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α:

لدينا: $g(0,567)\approx -0,22$ و $g(0,568)\approx 0,0006$ منه: $g(0,567)\times g(0,568)<0$

و g دالة مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[0,567;0,568]$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0,567<\alpha<0,568$.

3/ استنتاج إشارة $g(x)$:

من جدول تغيرات الدالة g نستنتج:

- إذا كان: $x\in]-\infty;\alpha[$ فإن: $g(x)<0$
- إذا كان: $x\in]\alpha;+\infty[$ فإن: $g(x)>0$.

II- 1/ إثبات أنه من أجل $x>0$ يكون لدينا : $f(x)=x^2\left(\frac{e^x}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)^2$

نعلم أنه إذا كان: $x>0$ فإن: $|x|=x$ منه: $f(x)=\left(e^x-\ln x\right)^2=\left(x\times\frac{e^x-\ln x}{x}\right)^2$ إذن: $f(x)=x^2\left(\frac{e^x}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)^2$.

- استنتاج : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{e^x}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)^2=+\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

2/ أ- لنبين أن المعادلة $e^x-\ln(-x)=0$ تقبل حلاً وحيداً β :

نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي: $h(x)=e^x-\ln(-x)$

منه: $h'(x)=e^x-\frac{1}{x}>0$ أي الدالة h مستمرة و رتيبة تماماً على المجال $]-\infty;0[$

و $h(-1,3)\approx0,01$ ، $h(-1,4)\approx-0,08$ أي: $h(-1,4)\times h(-1,3)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيداً β حيث $\beta\in]-1,4;-1,3[$.

ب- استنتاج حلول المتراجحتين :

⇦ لدينا من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ ، $e^x>\ln(x)$ إذن مجموعة حلول المتراجحة هي: $S_1=]0;+\infty[$

⇦ وَ من أجل كل x من المجال $]-\infty;0[$ ، h دالة متزايدة تماماً وَ $h(\beta)=0$ وعليه مجموعة حلول المتراجحة $e^x<\ln(-x)$ هي: $S_2=]-\infty;\beta[$ وَ مجموعة حلول المتراجحة $e^x\geq\ln(-x)$ هي: $S_3=[\beta;0[$.

3/ أ- لنبين أن : $f'(x)=\frac{2}{x}\left(e^x-\ln|x|\right)g(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{0\}$ حيث: $f'(x)=2\left(e^x-\ln|x|\right)\left(e^x-\frac{1}{x}\right)=2\left(e^x-\ln|x|\right)\left(\frac{xe^x-1}{x}\right)$

منه: $f'(x)=\frac{2}{x}\left(e^x-\ln|x|\right)g(x)$.

x	$-\infty$	β		0		α	$+\infty$
$\frac{2}{x}$	$-$		$-$	‖	$+$		$+$
$ex-\ln\lvert x\rvert$	$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$
$g(x)$	$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$

ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

الجدول المقابل يوضح إشارة $f'(x)$.

⊂ إذا كان: $x\in]-\infty;\beta]\cup]0;\alpha]$ فإن: $f'(x)\leq0$ أي الدالة f متناقصة.

⊂ إذا كان: $x\in[\beta,0[\cup[\alpha;+\infty[$ فإن: $f'(x)\geq0$ أي الدالة f متزايدة.

4/ لنبين أن : $f(\alpha)=\left(\frac{1}{\alpha}+\alpha\right)^2$

لدينا: $f(x)=\left(e^x-\ln|x|\right)^2$ منه: $f(\alpha)=\left(e^\alpha-\ln\alpha\right)^2$ ...(1)

وَ حسب الجزء الأول لدينا: $g(\alpha)=0$ معناه: $\alpha e^\alpha-1=0$ تكافئ: ($e^\alpha=\frac{1}{\alpha}$ وَ $\alpha=-\ln\alpha$) ...(2)

نعوض (2) في (1) نجد: $f(\alpha)=\left(\frac{1}{\alpha}+\alpha\right)^2$.

- تعيين حصراً للعدد $f(\alpha)$ سعته 10^{-2} :

لدينا: $0,567<\alpha<0,568$ منه: $\frac{1}{0,568}<\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{0,567}$ و منه: $1,761<\frac{1}{\alpha}<1,764$

و منه: $1,761+0,567<\frac{1}{\alpha}+\alpha<1,764+0,568$ أي: $2,328<\frac{1}{\alpha}+\alpha<2,331$ بالتربيع نجد: $5,42<f(\alpha)<5,43$.

5/ جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		β		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\beta)=0$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

6/ المناقشة البيانية :

لدينا: $e^x - \ln|x| - \sqrt{m} = 0$ تكافئ: $e^x - \ln|x| = \sqrt{m}$ بالتربيع الطرفين نجد: $\begin{cases} m = f(x) \\ e^x > \ln|x| \end{cases}$ أي: $\begin{cases} m = f(x) \\ x \in [\beta;0[\cup]0;+\infty[\end{cases}$

إذن حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الموازية لمحور الفواصل.

- إذا كان: $m \in]-\infty;0[$ فإن المعادلة لا تقبل حلول .
- إذا كان: $m = 0$ فإن المعادلة تقبل حل مضاعف سالب وهو β .
- إذا كان: $m \in]0;f(\alpha)[$ فإن المعادلة تقبل حل وحيد سالب .
- إذا كان: $m = f(\alpha)$ فإن المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب و الأخر مضاعف موجب و هو α .
- إذا كان: $m \in]f(\alpha);+\infty[$ فإن المعادلة تقبل ثلاث حلول، اثنان موجبان و الأخر سالب.